

Значит, X^T и X — это $n \times r$ матрицы, где $r = \text{rank}(X)$.
 $AX = 0$ $AX = 0$ $X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n$

Решение системы $AX = B$

Система $X = \text{известные матрицы}$ $AX = B$.
 $X = X_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n$

Итак, X — это матрица, состоящая из столбцов $X_1, \dots, X_n$.

Система $AX = B$ имеет решение, если B принадлежит линейной оболочке столбцов X .

Система $AX = B$ имеет решение, если B принадлежит линейной оболочке столбцов X .

Система $AX = B$ имеет решение, если B принадлежит линейной оболочке столбцов X .

Система $AX = B$ имеет решение, если B принадлежит линейной оболочке столбцов X .

Система $AX = B$ имеет решение, если B принадлежит линейной оболочке столбцов X .

Система $AX = B$ имеет решение, если B принадлежит линейной оболочке столбцов X .

Система $AX = B$ имеет решение, если B принадлежит линейной оболочке столбцов X .

Система $AX = B$ имеет решение, если B принадлежит линейной оболочке столбцов X .

Система $AX = B$ имеет решение, если B принадлежит линейной оболочке столбцов X .

Транспонирование перестановки - с элементами не меняется.

Пример $\sigma = (4, 5, 1, 3, 2)$ $|\sigma| = 3 + 3 + 1 = 7$ чет.

Пример $\beta = (1, 5, 4, 8, 2)$ $|\beta| = 3 + 2 + 1 = 6$ чет.

Индукция

Транспонирование имеет четкость перестановки.

Опр. Определитель квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ из числа } n! \text{ слагаемых}$$

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma \cdot a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n}$$

которая берется по всевозможным перестановкам

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

Означим $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Пример для $n=2, 3$ с помощью определителя

$$n=2 \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

н. слагаемых. Каждый слагаемый для произведений и элементов матрицы. Все слагаемые имеют одинаковый знак. Каждый элемент и элементов по правилу из каждого элемента и элементов.

З.е. $\det I$ определитель $n \times n$ единичной матрицы.

Определитель не меняется при транспонировании.

$$\det A = \det A^T$$

Доказано: если поменять a_{ij} на a_{ji} по строкам и столбцам, то $\det A = \det A^T$.

Рациональность, если заменили перестановку строк и столбцов матрицы A , то они перестановились в обратном порядке строк и столбцов матрицы A^T .

$$\text{Знак перестановки } \sigma_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{A^T} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_n \\ 1 & \dots & n \end{pmatrix}$$

То можно проверить, что они имеют одинаковый знак.

З.е.

При перестановке строк и столбцов определитель не меняется.

Дор-до: нуль

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ a_{31} & & & a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ a_{31} & & & a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Если произведем $a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$ для наращения с отрицательным Δ , то оно для наращения и отрицательное Δ_1 , и наоборот.

Знак того наращения определяется количеством

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & j & \dots & n \\ i & \dots & j & i & j & \dots & n \end{pmatrix}$$

Знак $\delta \Delta_1$ от произведения

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & j & \dots & n \\ i & \dots & j & i & j & \dots & n \end{pmatrix}$$

σ и τ отличаются на 1 произведением и имеют разные знаки.

Значит, Δ и Δ_1 отличаются только на знак наращения, но с произведением знака.

Дор-до 3

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & & & a_{2n} \\ a_{31} & & & a_{3n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & & & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

при этом аналогично.

Дор-до: доказано при этом

$$\Delta = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots$$

$$(a_{1\sigma_1} - a_{1\sigma_1'}) \dots a_{n\sigma_n} = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma_1} \dots a_{n\sigma_n} - \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma_1'} \dots a_{n\sigma_n}$$

Дор-до 4

Вспомогательное число (свойство) наращения за знак определителя.

Дор-до: доказано при этом

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma} \text{sgn } \sigma a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \dots a_{n\sigma_n} = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Аналогично

Если $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$

З-до 5

Вспомогательное равенство 0, если a_i имеет:

- 1) нулевую строку (столбец)
- 2) строка i для $a_{ii} = 0$ (столбец i)
- 3) строка i для $a_{ii} = 0$ (столбец i), n -та которых пропорциональна
- 4) строка i для $a_{ii} = 0$ (столбец i) для $a_{ii} = 0$ (столбец i)

З-до 6

Вспомогательное не изменяется, если k добавит строку (столбец) прибавить к строке (столбцу) k раз

Например, для i строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \sum_{k=2}^n \lambda_k a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \sum_{k=2}^n \lambda_k a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & \dots & \sum_{k=2}^n \lambda_k a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \langle \text{З-до 2} \rangle =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{n1} & a_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{k=2}^n \lambda_k \begin{vmatrix} a_{1k} & a_{1n} \\ a_{nk} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

З-до 6

Аналогично

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

В матрице A вычеркнем i строку и j столбец. Получим матрицу порядка $(n-1) \times (n-1)$. Элементы этой матрицы обозначим M_{ij} . Тогда $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ называется i -м j -м минором A .

З-до 7 (матрица Лаврентьева)

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \quad \det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}$$

Разложение по строке i или по столбцу j .

З-до 8:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{ij} A_{ij}$$

Если i строка i и j столбец j вычеркнуты, то $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

В матрице найдем определитель Δ_{11}

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{11} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

м.к. 8 1 строка $\delta_{11} = a_{11}$

$$= \delta_{11} \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \delta_{1\sigma(1)} \delta_{2\sigma(2)} \dots \delta_{n\sigma(n)}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} = a_{ij} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{ij} A_{ij}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+0 & a_{22}+0 & \dots & a_{2n}+0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

В-до 8

опредетель верхней (нижней) треугольной матрицы равен произведению ее диагональ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \langle \text{произр. по 1-ой строке} \rangle =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \langle \text{по 1-ой строке} \rangle =$$

$$= \dots = a_{11} a_{22} a_{33} \dots a_{nn}$$

В-до 9

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = 0 \quad k \neq j$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = 0 \quad k \neq j$$

линия матрицы A из n элементов a_{ij} и n элементов A_{ik} $k \neq j$ $\Rightarrow$ произведение, составленное из n элементов a_{ij} и A_{ik} $\Rightarrow 0$.

Доказ: пусть определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad \langle \text{по 1-ой строке} \rangle =$$

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ik} = 0$$

В-до 10 (опредетель матрицы с n нулей)

Пусть $A = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$

B и C - квадратные матрицы

0 - нулевая матрица

$$\text{Major} \det A = \det B \cdot \det C$$

bac-oo:

С помощью n -х точек-и
привести к n -матрице

$$\det B' = \det B$$

Zusammenfassung (0 c): $\det C' = \det C$ $\Rightarrow$ $\det C' = \det C$

$$\det C' = \det C$$

Тогда матрица
вероятностей.

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b' & c' \end{pmatrix} \quad \text{super}$$

то $\frac{\partial y}{\partial x}$ & $\det A' = \text{произведение}$
 $\text{н-ос } J = p. \text{ н-н } B' \cdot p. J_{n-n} C' = \det B' \det C'$

Teorema

Точки A и B - заданные
определённые масштабы
и не определяются.

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

How do

Пусть $C = A \cdot B$
Рассмотрим все элементы

$$M_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -E & B \end{pmatrix}$$

t - er varslings varslings n.

$$\det M_1 = \det M_1^T = \det A^T \cdot \det B^T = \det A \cdot \det B$$

В центре M_2 — центроид

$$\mu_2 \mapsto \mu_3 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

Вектор перестановки: $(n+1)$ строку уменьши на (-1) и изменив место с $(n+2)$ строку дойди строка с (-1) и изменив с

Токаемин; это n -вещи марку M_1 и одно произведение $\otimes$ марку M_2 .

$$N_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Заметим, что μ_1 и μ_2 являются собственными значениями A и B соответственно. В том же случае, когда $\mu_1 = \mu_2$, то A и B коммутируют.

В результате δ (n-1) строки δ (n-1), δ (n-2) ... δ 1, а δ остальных, например, δ 1, δ 2

$$\sum a_{ij} \delta_{ji} = C_{ii} \quad \text{и т.д.}$$

Получили аналогичные преобразования (n-2) ... δ n

§ 3. Определить матрицу и их свойства

Опр. Пусть A - квадратная матрица порядка n .
Матрица B δ (кратное порядка n) наз. обратной к A , если $AB = BA = E$.

Обозначение: A^{-1}

Теорема 1

Если матрица A имеет обратную, то она квадратная.
Доказ:

Пусть обратная пре

$$AB = BA = E$$

$$AB' = B'A = E$$

Умножим $B = BE = B(AB') = (BA)B' = EB' = B'$

Теорема 2 (критерий невырожденности)

Для того чтобы кв матрица A имела обратную, необходимо, чтобы $\det A \neq 0$.

Доказ:

Необходимость

Пусть A^{-1} - обратная. Тогда $\det(AA^{-1}) = \det E = 1$
 $\det A \cdot \det A^{-1} = \det A \neq 0$

Замечание

Если квадратную матрицу $\det A = A^v = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{1n} \\ A_{n1} & A_{nn} \end{pmatrix}$

A_{ij} - алгебраическое дополнение к n -й a_{ij}

Токажем, что $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^v$ (коммутативный способ построения)

Если матрица $C = A \cdot \left(\frac{1}{\det A} A^v \right)$

$$C_{ik} = \frac{1}{\det A} \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} 1, & \text{если } k=i \\ 0, & \text{если } k \neq i \end{cases} \quad \text{по } \textcircled{1} \text{ лемме (сб-до 9)}$$

Аналогично, $C' = \left(\frac{1}{\det A} A^v \right) A$ Тогда матрица, $I = E$

$$A_{kj} = \frac{1}{\det A} \sum_{i=1}^n A_{ik} a_{ij} = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

Теорема 3
Если матрицы A и B имеют обратные, то $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Доказ:

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = E$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1} \left(\frac{E}{E} (A^{-1}A) \right) B = B^{-1}B = E$$

Теорема 4

Если матрица A имеет обратную, то A^T также имеет обратную. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

$$A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E$$

$$(A^{-1})^T A^T = (A A^{-1})^T = E^T = E$$

2 способа нахождения обратного матрицы

Первый способ нахождения матрицы

$$F_{S+} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad F_{S+}(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$$F_S(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$F_S(\lambda) A$ S-ад матрица A у нас на λ
 $(A \cdot F_S(\lambda))$ S-ад матрица A у нас на λ

$F_{St} \cdot A$ - матрица S_t на λ
 $(A \cdot F_{St})$ - II-матрица на λ

$F_{S+}(\lambda) \cdot A$ - K S-ад матрица A на λ
 $(A \cdot F_{St}(\lambda))$ - H-е S-ад матрица

Заменим $(A|E) \rightarrow$ и заменим E на A^{-1}
 матрицу A к E матрицу E к A и E матрицу A к E

$$\rightarrow (E|A^{-1})$$

$$(P_1 \dots P_n) A = E \Rightarrow P = A^{-1}$$

Все n -е матрицы обратны. Обратные к n -м матрице

§4. Решение матричных ур-й. Получим матрицу $X = A^{-1}B$ матрицы A - трансп. матрица.

$$X A = B \rightarrow X = B A^{-1}$$

$$A^{-1} A X = A^{-1} B$$

Степень (получим матрицу)

$$C X = B$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \end{cases}$$

матрица обратная к A имеет обратную, то ее обратная матрица обратна к A

$$X_k = \frac{\det A_k}{\det A}, \quad k = 1, \dots, n$$

$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
 Ак называется k -матрицей A размерности $k \times n$ или $n \times k$ элементов B .

Замечание:

$$AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

$$(A^{-1})_{ij} = (L^{-1})_{ij}, \quad L_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A}$$

Например, $X_1 = L_{11} \delta_1 + L_{12} \delta_2 + \dots + L_{1n} \delta_n = \frac{A_{11} \delta_1 + A_{12} \delta_2 + \dots + A_{1n} \delta_n}{\det A}$

числитель: разложение по 1 элементу

$$\text{определитель матрицы } A_1 = \begin{vmatrix} \delta_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Равен матрице по строкам

Оп. строкам порядка k матрицы A ($m \times n$) называются k элементов, составивших $k \times k$ минор, образующих k -элементную матрицу A_k из k элементов.

$$M \begin{pmatrix} j^1 & j^k \\ j^k & j^k \end{pmatrix}$$

Оп. Равен матрице по строкам k -матрицы A ($m \times n$) называются k элементов, составивших $k \times k$ минор.

$$\Gamma K_M(A)$$

Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Теорема } \Gamma K_M(A) = \Gamma K A$$

Оп. M -большая матрица, или $M \neq 0$
 2) порядок $M = \Gamma K A$

Глава 8. Квадратные матрицы. Задачи на решение

8.1. Квадратные матрицы

Оп. Определитель матрицы A называется $\det A = \sum_{i=1}^n a_{ii} \delta_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} \delta_i \delta_j$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$

или $\det A$ называется определителем.

Квадратную матрицу можно записать в матричной форме $X^T A X$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X^T = (x_1, \dots, x_n)$$

матрица K квадратная симметричная $A = A^T$

Равен матрице A на диагонали K квадратной.

Пример $X_1^2 + 4x_1 x_3$
 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$